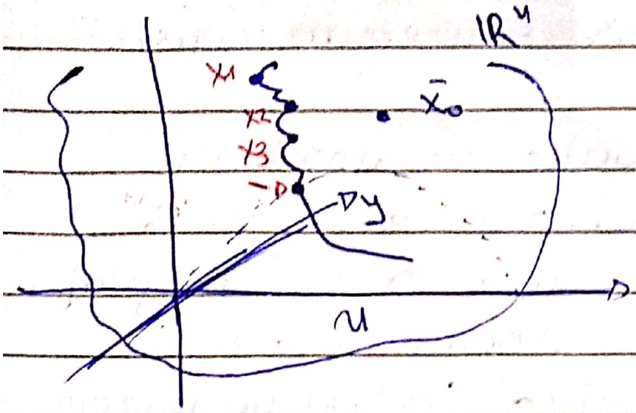
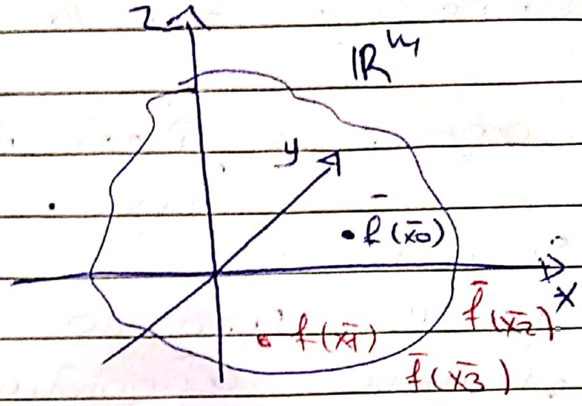
9/11/20

Για $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\bar{x}_0 \in U$





$\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_m \end{pmatrix}$

Ορισμός: Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U και $\bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$. Τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με

$\bar{x}_\nu \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \bar{x}_0 : \bar{f}(\bar{x}_\nu) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} \bar{f}(\bar{x}_0) \Leftrightarrow \forall j = 1, \ldots, m : f_j(\bar{x}_\nu) \to \ell_j$

Βασικές ιδιότητες ορίων και συνέχειας διανυσματικών συναρτήσεων [ισοδύναμοι χαρακτηρισμοί ορισμών, μοναδικότητα ορίου, όρια και συνέχεια αθροίσματος συναρτήσεων και γινομένου συνάρτησης με βαθμωτό μέγεθος και εσωτερικού γινομένου συναρτήσεων καθώς και]

Σύνθεση συνεχών είναι συνεχής

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο $\bar{x}_0$ και $\bar{g}: V \to \mathbb{R}^k$ συνεχής στο $\bar{y}_0$ με $\bar{f}(U) \subset V$ και $\bar{f}(\bar{x}_0) = \bar{y}_0$, τότε $\bar{g} \circ \bar{f}: U \to \mathbb{R}^k$, συνεχής στο $\bar{x}_0$

Αποδ.

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$, τότε θνδο:

$(\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}_\nu) \xrightarrow[\nu \to \infty]{} (\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x}_0)$

$= \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}_\nu)) \qquad = \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}_0))$

Όμως έχουμε ότι:
$\bar f(\bar x_\nu) \to \bar f(\bar x_0)$ και $\forall (\bar y_\nu) \subset V$ με $\bar y_\nu \to \bar y_0$: $\bar g(\bar y_\nu) \to \bar g(\bar y_0)$

"Εικόνα συμπαγούς επί συνεχή είναι συμπαγής"

Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $\bar f : U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής (δηλ. σ' όλο το Π.Ο.). Τότε: $\bar f(U) \subset \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές.

Αποδ:
[$U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow \forall (\bar x_\nu) \subset U \; \exists (\bar x_{k\nu}) \subset (\bar x_\nu)$ και $\bar x_0 \in U$: $\bar x_{k\nu} \to \bar x_0$]
Έστω $(\bar y_\nu) \subset \bar f(U) \Leftrightarrow \exists (\bar x_\nu) \subset U$ με $\bar f(\bar x_\nu) = \bar y_\nu$
$\underset{U \text{ συμπαγής}}{\Longrightarrow} \exists (\bar x_{k\nu}) \subset (\bar x_\nu)$ και $\bar x_0 \in U$ με $\bar x_{k\nu} \to \bar x_0 \Rightarrow$
$\overset{f \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \exists \underbrace{(\bar x_{k\nu})}_{= \bar y_{k\nu}} \to \bar f(\bar x_0)$

"Συνεχής επί συμπαγούς είναι ομοιόμορφα συνεχής"

Στην ειδική περίπτωση $m=1$ το (Β) συνεπάγεται:
(Δ) Συνεχής πραγματική συνάρτηση επί συμπαγούς Π.Ο. λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο.
Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $f : U \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε: [(Β): $f(U) \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές και] η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ. $\exists\, x_{min}, x_{max} \in U$: $\underbrace{\min f}_{:= \min f(U) = \min\{f(\bar x) : \bar x \in U\}} = f(x_{min}) \le f(\bar x) \le f(x_{max}) = \max f$, δηλ. ~~min~~
$\min\{\ldots\} \in \{\ldots\}$ και $\forall y \in^{*} \{\ldots\}$: $y \ge \min\{\ldots\}$

(*) ~ $y \in f(U)$

Αποδ: Από το (Β) γνωρίζουμε ήδη ότι $f(U) \subset \mathbb{R}$ είναι συμπαγές. Αυτό όμως σημαίνει ότι το $f(U)$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Πράγματι, αφού $f(U)$ συμπαγές = κλειστό και φραγμένο υποσύνολο $\mathbb{R}$, υπάρχει μέγιστο κάτω φράγμα

μέγιστο κάτω φράγμα = inf f = inf f(U) = inf{ $f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$: $\bar{x} \in U$ } $\in \mathbb{R}$, δηλ. ισχύει $\forall \bar{x} \in U$ $f(\bar{x}) \geq \inf f$ και $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{x}_\varepsilon \in U$ με $f(\bar{x}_\varepsilon) < \inf f + \varepsilon$ [δηλ. το $\inf f + \varepsilon$ δεν είναι κάτω φράγμα]

Ειδικότερα, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ $\exists \bar{x}_\nu \in U$ με $f(\bar{x}_\nu) < \inf f$ και [αφού το inf f είναι κάτω φράγμα] $\inf f = f(\bar{x}_\nu)$

$\Rightarrow$ Θ. ισοσυγκλινουσών $f(\bar{x}_\nu) \to \inf f \overset{f(U) \text{ κλειστό}}{\Rightarrow} \inf f \in f(U)$
$\to \exists x_{min} \in U : \inf f = f(x_{min})$

ΠΙΘΑΝΟ ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Άσκηση 23: Εξετάστε σε ποια σημεία του π.ο. της είναι συνεχής:

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
π.ο.

συνεπώς αν εξετάζω όρια και συνέχεια της f παίρνω ακολουθίες από όλο το $\mathbb{R}^4$.

(a) f συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
Πράγματι, έστω $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ τυχαίο αλλά σταθερό. Επειδή το $\{(0,0)\}$ είναι κλειστό $\subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ είναι ανοικτό, συνεπώς $\exists \varepsilon > 0 : B((x_0,y_0),\varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

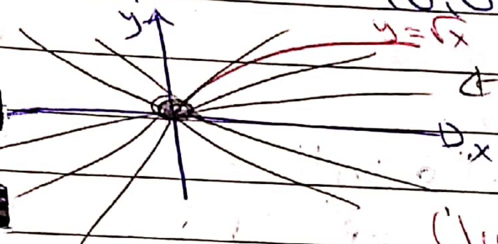
Συνεπώς, για κάθε ακολουθία $(x_\nu,y_\nu) \to (x_0,y_0)$, $\exists \nu_0$, $\forall \nu \geq \nu_0$ $(x_\nu,y_\nu) \in B((x_0,y_0),\varepsilon)$ και αφού $x_\nu \to x_0$, $y_\nu \to y_0$ τότε: $\Rightarrow \exists$ $x_\nu y_\nu^2 \to x_0 y_0^2$, $x_\nu^2 \to x_0^2$,

$y_\nu^4 \to y_0^4$, $x_\nu^2 + y_\nu^4 \to x_0^2 + y_0^4 \Rightarrow \underbrace{\dfrac{x_\nu y_\nu^2}{x_\nu^2+y_\nu^4}}_{f(x_\nu,y_\nu)} \to \dfrac{x_0 y_0^2}{x_0^2+y_0^4} = f(x_0,y_0)$

$0 \neq x_\nu^2+y_\nu^4$ $\forall \nu \geq \nu_0$

Αφού αυτό ισχύει $\forall$ ακολ. (x_ν,y_ν) στη U με $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$ $\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, έχουμε (ΟΡΙΣΜΟΣ!) ότι η f συνεχής στο (x_0,y_0)

«Ζουμί» της άσκησης: Η f είναι συνεχής πάνω σ' όλες τις «ακτίνες» στο σημείο $(0,0)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$



πάνω (δηλ. περιορισμένη) σε όλες αυτές τις ευθείες η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Όμως η f (μη περιορισμένη στις ευθείες αυτές!) δεν είναι συνεχής π.χ. κατά μήκος της $y=\sqrt{x}$, η f δεν συγκλίνει στο 0

(β) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας $y=\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Πράγματι, η $g(x) = f(x,\alpha x) =$

$$= \frac{x(\alpha x)^2}{x^2+(\alpha x)^4} = \frac{\alpha x^3}{x^2(1+\alpha^4 x^2)} = \frac{\alpha x}{1+\alpha^4 x^2} \xrightarrow{x\to 0} 0 = g(0) = f(0,0)$$

(γ) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ δηλ. υπάρχει [«παίζει να υπάρχουν οσοδήποτε άλλες»] $(x_\nu,y_\nu)\in\mathbb{R}^2$ με $(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)$ και $f(x_\nu,y_\nu) \not\to f(0,0)$

π.χ. $(x_\nu,y_\nu) = \left(\dfrac{1}{\nu}, \dfrac{1}{\sqrt{\nu}}\right) \to (0,0)$ και $f(x_\nu,y_\nu) = \dfrac{\frac{1}{\nu}\,\alpha^2\,\frac{1}{\nu}}{\frac{1}{\nu^2}+\alpha^4\frac{1}{\nu^2}} =$

$$= \frac{\alpha^2}{\alpha^4+1} \xrightarrow{\nu\to\infty} \frac{\alpha^2}{\alpha^4+1} \neq 0 = f(0,0)$$